

# SEQUÊNCIAS SEMI-EXATAS, COMPLEXOS DE COCADEIAS E MÓDULOS DE COHOMOLOGIA.

Maria Paula dos Santos Cavalcanti, Ermínia de Lourdes Campello Fanti. – Matemática - Matemática - Departamento de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto.

A Cohomologia de Grupos estabelece uma significativa interação entre a Álgebra e a Topologia e tem sido responsável pela criação e desenvolvimento de outras áreas da Matemática. Para o estudo de Cohomologia de Grupos é fundamental a teoria de Módulos e mais geralmente de Álgebra Homológica. Os grupos de cohomologia de um grupo  $G$  são os grupos ( $\mathbb{Z}$ -módulos) de cohomologia de um complexo de cocadeias especial, obtido a partir de uma resolução projetiva de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{Z}G$ , aplicando o funtor  $\text{Hom}$  e, para computar tais grupos, uma ferramenta importante é a *seqüência exata longa de cohomologia*.

Dizemos que uma seqüência finita ou infinita  $C: \dots \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow \dots$  de homomorfismos de  $A$ -módulos, onde  $A$  é um anel com unidade, é *semi-exata* se, para todo módulo da seqüência, a imagem do homomorfismo de entrada está contida no núcleo do homomorfismo de saída. Os módulos de uma seqüência semi-exata são geralmente indexados por inteiros na ordem decrescente ou crescente. Se usamos inteiros na ordem decrescente (crescente) como índice, a seqüência semi-exata é denominada *complexo de cadeia (cocadeia)* e os homomorfismos são denotados por  $\partial_n$  (respectivamente  $\delta^n$ ) e são referidos como operadores *bordos* (respectivamente *cobordos*). Deste modo um complexo de cadeias é da forma  $C: \dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$ , com  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  e, um de cocadeia é da forma  $C: \dots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \dots$ , com  $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ .

Neste trabalho, os conceitos de *módulos de cohomologia* de um complexo de cocadeias, *aplicações de cocadeias*, *homomorfismos induzidos* e *aplicações homotópicas* são apresentados bem como alguns exemplos e resultados relacionados, com destaque para o *teorema da seqüência exata longa em cohomologia*.

**Definição:** Dado um complexo de cocadeias  $C: \dots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \dots$  com  $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ , o kernel (ou núcleo) de  $\delta^n$ , denotado por  $Z^n(C)$  é chamado *módulo  $n$ -dimensional de cociclos* de  $C$  e o conjunto imagem de  $\delta^{n-1}$ , denotado por  $B^n(C)$  é chamado *módulo  $n$ -dimensional de cobordos* de  $C$ . Finalmente, o módulo derivado de  $C$  no módulo  $C^n$ , denotado por  $H^n(C) = Z^n(C) / B^n(C)$ , é chamado *módulo de cohomologia  $n$ -dimensional de  $C$*  e a coleção  $H^*(C) = \{H^n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é chamada *cohomologia* do complexo de cocadeias  $C$ .

Similarmente define-se, considerando um complexo de cadeia  $C$  e operadores bordos  $\partial_n$ , *ciclos*, *bordos* e *módulos de homologia*.

**Exemplo:** Consideremos  $m \in \mathbb{N}^*$  um número natural fixo e o complexo de cocadeias  $C: \dots \xrightarrow{0} C^{-1} = \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^{-1}=m} C^0 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^0=0} C^1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^1=m} C^2 = \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots$  onde  $\mathbb{Z}$  é o anel dos inteiros visto como  $\mathbb{Z}$ -módulo,  $\delta^{2k+1}(x) := m.x$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta^{2k} = 0$ , denota o homomorfismo nulo e  $C^k := \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Temos que  $Z^0(C) := \text{Ker}(\delta^0) = \mathbb{Z}$ ,  $B^0(C) = \text{Im}(\delta^{-1}) = m\mathbb{Z}$ , e assim  $H^0(C) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$ . Agora,  $Z^1(C) = \text{Ker}(\delta^1) = \{0\}$ ,  $B^1(C) = \text{Im}(\delta^0) = \{0\}$  e portanto  $H^1(C) = \{0\}$ . Do mesmo modo,  $Z^{2k}(C) = \mathbb{Z}$ ,  $B^{2k}(C) = m\mathbb{Z}$ , e assim  $H^{2k}(C) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$ ;  $Z^{2k+1}(C) = \{0\}$ ,  $B^{2k+1}(C) = \{0\}$  e  $H^{2k+1}(C) = \{0\}$ . Assim  $H^k(C) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n, & \text{se } k \text{ é par} \\ \{0\}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$

**Definição.** Consideremos dois complexos de cocadeias de  $A$ -módulos:  $(C, \delta)$  e  $(D, \delta')$ . Uma *aplicação de cocadeias* (ou *homomorfismo entre complexos de cocadeias*)  $f: C \rightarrow D$ , é uma família de

homomorfismos de  $A$ -módulos,  $f = \{f^n : C^n \rightarrow D^n; n \in \mathbb{Z}\}$  tal que a relação de comutatividade  $\delta^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \delta^{n+1}$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Por simplicidade é usual denotar tanto as aplicações cobordos de  $C^k$  em  $C^{k+1}$ , bem como as aplicações de  $D^k$  em  $D^{k+1}$  por  $\delta^k$ . Nesse caso a relação de comutatividade é dada por  $\delta^n \circ f^n = f^{n+1} \circ \delta^{n+1}$ , para todo inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ , que as vezes é referida simplesmente por  $\delta \circ f = f \circ \delta$ .

O seguinte fato é útil para a definição de aplicação induzida em cohomologia e o teorema da seqüência exata longa.

**Proposição.** Seja  $f : C \rightarrow D$  uma aplicação de cocadeias. Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , o homomorfismo  $f^n : C^n \rightarrow D^n$  leva  $Z^n(C)$  em  $Z^n(D)$ , e  $B^n(C)$  em  $B^n(D)$ , isto é,  $f^n[Z^n(C)] \subset Z^n(D)$  e  $f^n[B^n(C)] \subset B^n(D)$ .

**Definição.** Seja  $f : C \rightarrow D$  uma aplicação de cocadeias. Segue da proposição anterior que, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^n$  induz um homomorfismo  $H^n(f) : H^n(C) \rightarrow H^n(D)$  que associa a cada  $\bar{x} = x + B^n(C)$  o elemento  $H^n(f)(\bar{x}) := f^n(x) + B^n(D)$ . Este homomorfismo  $H^n(f)$  é denominado *homomorfismo induzido  $n$ -dimensional de  $f$* . Tal homomorfismo pode ser também denotado por  $f^{*,n}$  ou simplesmente por  $f^*$ , sem especificar o nível.

Se  $f : C \rightarrow D$  e  $g : D \rightarrow E$  são homomorfismos de complexos de cocadeias, é fácil ver que a família  $h = \{g^n \circ f^n : C^n \rightarrow E^n; n \in \mathbb{Z}\}$  é um homomorfismo do complexo de cocadeias  $C$  no complexo de cocadeias  $E$ . Este homomorfismo composição  $h : C \rightarrow E$  é denotado por  $g \circ f : C \rightarrow E$ .

**Proposição:** (1) Se  $id : C \rightarrow C$  é a aplicação identidade de cocadeias do complexo  $C$  então  $H^n(id) = id_{H^n(C)} : H^n(C) \rightarrow H^n(C)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

(2) Se  $f : C \rightarrow D$  e  $g : D \rightarrow E$  são homomorfismos de complexos de cocadeias então  $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

(3) Se  $f : C \rightarrow D$  é um isomorfismo de cadeias (isto é,  $f^n$  são isomorfismos para todo  $n$ ) então  $H^n(f)$  é um isomorfismo e  $(H^n(f))^{-1} = H^n(f^{-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

Dada uma seqüência exata de complexos de cocadeias  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ , é possível definir, para todo inteiro  $n$ , um homomorfismo  $\Delta^n : H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C)$ , que associa a cada  $\bar{z} = z + B^n(E)$  o elemento  $\Delta^n(\bar{z}) = \bar{v} = v + B^{n+1}(C)$ , onde  $v$  é determinado de modo que  $f^{n+1}(v) = \delta^n(u)$  e  $g^n(u) = z$ .

**Definição:** O homomorfismo  $\Delta^n : H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C)$ , acima referido é denominado *homomorfismo conexão* ou *homomorfismo conectante*.

**Teorema:** Se uma seqüência de complexos de cocadeias  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$  é exata então é também exata a seqüência exata longa em cohomologia  $\dots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} H^n(C) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(D) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(E) \xrightarrow{\Delta^n} H^{n+1}(C) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} \dots$  onde, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H^n(f)$  e  $H^n(g)$  são os homomorfismos induzidos e  $\Delta^n : H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C)$  é o homomorfismo conexão.

**Corolário.** Se dois dos três complexos de cocadeias  $C$ ,  $D$  e  $E$  na seqüência exata curta  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$  são exatos, então o complexo de cocadeias remanescente também é.

**Referências Bibliográficas:**

- [1] BROWN, K.S. *Cohomology of Groups*. New York: Springer Verlag. 1992. 306p.
- [2] HU, Sze-Tsen. *Introduction to Homological Algebra*, San Francisco: Holden - Day, INC. 1968. 202p.
- [3] MILIES, F.C.P. *Anéis e Módulos*. São Paulo – USP. 1972. 203 p.
- [4] ROTMAN, J. J. *An Introduction to Homological Algebra*. San Diego. Academic Press, INC. 1979. 376p.

**Bolsa:** PIBIC/ CNPq-UNESP